TD 1 : Logique Indications

Dans tout ce TD : P, Q et R sont des assertions qui peuvent éventuellement dépendre d'une ou plusieurs variables, et E est un ensemble quelconque.

Opérateurs logiques

1 ★ On suppose que P, Q et R sont *fausses*.

1) Est-ce que $(P \implies Q) \implies R$ est vraie ?
2) Même question pour $P \implies (Q \implies R)$. Que remarque-t-on ?

1) Raisonner étape par étape : est-ce que $P \implies Q$ est vraie ? Par suite, est-ce que $(P \implies Q) \implies R$ est vraie ?
2) Idem.

2 ★☆ Écrire la négation des assertions suivantes :

1) non P et Q
2) P ou $(Q \implies R)$
3) $P \implies (Q \implies R)$
4) $P \iff Q$

Traiter l'exercice étape par étape. Par exemple pour la 2, si on pose l'assertion Q' : "$Q \implies R$", alors on cherche la négation de P ou Q'. Que vaut cette négation ? Puis il faut tout exprimer en fonction de P, Q et R.

3 ★☆

1) Montrer que "$P \implies Q$" équivaut à "non P ou Q" en utilisant une table de vérité.
2) Faire de même sans utiliser de table de vérité.

1) La méthode est identique à celle vue en cours.
2) Comment peut-on exprimer non$(P \implies Q)$? En déduire le résultat demandé.

4 ★★ On définit l'opérateur logique "ouex" pour désigner le "ou exclusif". Ainsi, "P ouex Q" est vrai si l'une des deux assertions est vraie mais pas l'autre. Sinon, "P ouex Q" est fausse.

1) Dresser la table de vérité de "P ouex Q".
2) En déduire une expression simple de la négation de "P ouex Q".
3) Donner une assertion équivalente à "P ouex Q" en utilisant uniquement les connecteurs logiques "et", "ou" et "non".

1) Partir de la définition de l'énoncé.
2) Ajouter et remplir la colonne "non $(P$ ouex $Q)$" dans la table de vérité.
3) Partir de la définition de l'énoncé.

Quantificateurs

5 ★★ Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1) $\exists p \in \mathbb{Z} \quad p$ est pair et p est premier
2) $\forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 + y + 1 > 0$
3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x < 3 \implies x^2 < 9$
4) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 4x \geq 0 \implies (x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2)$
5) $\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq M$
6) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{R} \quad m^2 = n$
7) $\exists! u \in \mathbb{R} \quad u^3 + u^2 = 0$

6 ★ Donner la négation des assertions 1) à 6) de l'exercice précédent.

Pour la deuxième question, l'existence et l'unicité d'un tel u équivaut à ... l'existence d'un tel u ET l'unicité d'un tel u. Cf chapitre 0...

7 ★★ Est-ce que les assertions suivantes sont vraies ?

- $P : (\exists x \in \mathbb{R} \quad x + 1 = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R} \quad x - 2 = 0)$
- $P' : \exists x \in \mathbb{R} \quad (x + 1 = 0 \text{ et } x - 2 = 0)$
- $Q : \forall x \in \mathbb{R} \quad (x \neq 0 \text{ ou } x \neq 1)$
- $Q' : (\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 1)$

8 ★★

1) Exprimer "$\exists! x \in E \quad P(x)$" en utilisant les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, mais pas $\exists!$ (vous avez le droit d'utiliser des connecteurs logiques).
2) En déduire la négation de "$\exists! x \in E \quad P(x)$".

$\exists ! x \in E \quad P(x)$ signifie qu'on a existence ET unicité : traduire l'existence et traduire l'unicité séparément puis les combiner avec le ET.

9 ★★ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer verbalement ("en français") la signification des assertions suivantes :

1) $\forall x \in I \qquad f(x) \geq 0$
2) $\forall x_1, x_2 \in I \qquad x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
3) $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \qquad f(x) = \lambda$
4) $\forall x \in I \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \lambda$

Essayer de reformuler en langage naturel. Chaque assertion correspond à une propriété typique d'une fonction. Attention, une assertion est "piégeuse"...

10 ★★☆ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

1) f s'annule au moins une fois sur I.
2) f est la fonction nulle.
3) f présente un minimum.
4) f n'est pas (une fonction) constante.
5) f est majorée.

Pour l'assertion 4, on peut dans un premier temps traduire sa négation.

11 ★★★ Dans cet exercice, on notera P_x et Q_x au lieu de $P(x)$ et $Q(x)$. Compléter les lignes ci-dessous avec $\implies$, $\impliedby$, $\iff$ selon ce qui est le plus approprié :

1) $\forall x \in E \;\; P_x$ et Q_x ...... $(\forall x \in E \;\; P_x)$ et $(\forall x \in E \;\; Q_x)$
2) $\forall x \in E \;\; P_x$ ou Q_x ...... $(\forall x \in E \;\; P_x)$ ou $(\forall x \in E \;\; Q_x)$
3) $\exists x \in E \;\; P_x$ et Q_x ...... $(\exists x \in E \;\; P_x)$ et $(\exists x \in E \;\; Q_x)$
4) $\exists x \in E \;\; P_x$ ou Q_x ...... $(\exists x \in E \;\; P_x)$ ou $(\exists x \in E \;\; Q_x)$

On ne demande pas de justifier. Prendre le temps de reformuler en langage "naturel" chaque assertion. Vous pouvez confirmer votre intuition avec des exemples.

Raisonnements classiques

12 ★ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 1 + 2^n$.
Il faut procéder par récurrence, et on voit que la relation de récurrence qui définit u_{n+2} fait intervenir deux termes : u_{n+1} et u_n. Quel type de récurrence cela encourage à faire ?

13 ★★☆ On considère la propriété P_n : $8^n + 2$ est multiple de 7.

1) Montrer que P_n est héréditaire, c'est-à-dire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n \implies P_{n+1}$.
2) Est-ce que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$? Moralité ?

C'est essentiellement un exercice de rédaction.

14 ★★☆ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$.
Raisonner par disjonction de cas, selon la parité de n.

15 ★★ Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, l'entier $7^n - 4^n$ est un multiple de 3.

16 ★★ Soit x un réel (quelconque). Démontrer l'assertion :

$$x = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad |x| < \varepsilon$$

Raisonner par double implication. Une implication est facile. Pour prouver l'autre, raisonner par contraposée.

17 ★★ On considère 3 réels x_1, x_2, x_3 tels que

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1$$

Montrer qu'on a $x_2 - x_1 \leq \dfrac{1}{2}$ ou $x_3 - x_2 \leq \dfrac{1}{2}$.
Raisonner par l'absurde.

18 ★★ Soit a et b deux réels. Montrer que si l'équation $ax + b = 0$ admet une infinité de solutions, alors $a = 0$.
On vous demande de montrer une implication. On peut donc par exemple raisonner par contraposée. Autre possibilité : raisonner par l'absurde.

19 ★★ Que penser de la preuve suivante ?

Affirmation : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: Dans une boite de n crayons, tous les crayons sont de la même couleur.
Preuve : Quand $n = 1$, l'assertion est trivialement vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons l'assertion vraie pour n crayons. Parmi $n+1$ crayons, les n premiers sont donc de la même couleur, et les n derniers aussi. Donc les $n+1$ crayons sont de la même couleur. Ainsi par récurrence, l'assertion est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. $\square$

L'affirmation est évidemment fausse, il y a une faille dans la preuve. Essayer de voir à partir de quel n cela ne fonctionne pas...

20 ★★☆ Montrer par récurrence forte que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $2^p m$ avec $p \in \mathbb{N}$ et m un entier naturel impair.

Pour l'hérédité, lorsqu'il faut étendre la propriété à l'entier $n+1$, on peut distinguer les cas où $n+1$ est pair et où $n+1$ est impair.

21 ★★★ Prouver : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \in \mathbb{N}$.

Raisonner par disjonction de cas, selon la parité de n.

22 ★★★★ Dans un plan sont placés 66 points distincts. On trace toutes les droites passant par deux de ces points et on en compte 2026 distinctes. Justifiez que parmi ces 66 points, 4 au moins sont sur une même droite.

Raisonner par l'absurde. Combien de droites sont tracées si chaque droite contient exactement deux points ? Ensuite, il faut considérer des cas où un certain nombre de droites contiennent 3 points... À vous de continuer !

Raisonnement par analyse-synthèse

23 ★★ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad f(x-y) = x - f(y)$$

Déterminer $f(0)$.

24 ★★ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Déterminer $f(0)$.

25 ★★★ Montrer que toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ se décompose de manière unique sous la forme

$$\forall x \in E \quad f(x) = g(x) + c$$

avec c un réel et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt = 0$.

Trouver d'abord c, la fonction g peut ensuite s'en déduire.